2.9.2 Obecná exponenciální funkce

Předpoklady: 2901

Začneme tam, kde jsme včera skončili:

$$y = 2 \cdot 2^{x-1} \qquad\qquad y = \frac{2^{x+1}}{2}$$

Pokud uvažujeme $y = 2^x = f(x)$, platí:

$y = 2 \cdot 2^{x-1} = 2f(x-1)$

Zvolíme x.

Vypočteme $x-1$.

Nakreslíme funkci $y = f(x-1) = 2^{x-1}$.

Nakreslíme funkci $y = 2f(x-1) = 2 \cdot 2^{x-1}$.

Pokud uvažujeme $y = 2^x = f(x)$, platí:

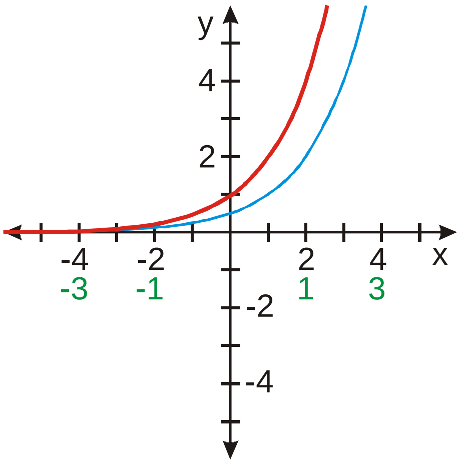
$y = \frac{2^{x+1}}{2} = \frac{1}{2} f(x+1)$

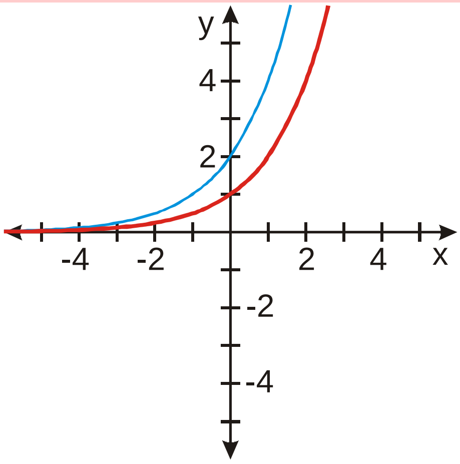
Zvolíme x.

Vypočteme $x+1$.

Nakreslíme funkci $y = f(x+1) = 2^{x+1}$.

Nakreslíme funkci $y = \frac{1}{2} f(x+1) = \frac{2^{x+1}}{2}$.





Obě výsledné funkce se shodují se základní funkci $y = 2^x$. Jak je to možné?

Zkusíme upravit předpis levé funkce: $y = 2 \cdot 2^{x-1} = 2^1 \cdot 2^{x-1} = 2^{x-1+1} = 2^x$ $\Rightarrow$ opravdu jde o základní funkci $y = 2^x$.

Př. 1: Úpravou výrazu dokaž, že platí: $y = \frac{2^{x+1}}{2} = 2^x$.

$y = \frac{2^{x+1}}{2} = \frac{2^{x+1}}{2^1} = 2^{x+1-1} = 2^x$.

Zdá se, že úpravy exponentů budou hrát u exponenciálních funkcí značnou roli.

Dodatek: Předchozí příklad můžeme interpretovat i takto: U exponenciální funkce platí: $y = 2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$ $\Rightarrow$ nezáleží, zda kreslíme funkci $y = 2^{x+1}$ (graf posunujeme o jedna doleva) nebo funkci $y = 2 \cdot 2^x$ (graf natáhneme na dvojnásobek ve svislém směru). $\Rightarrow$ Funkce $y = 2^x$ má přesně takový tvar, abychom posunutím o 1 doleva získali stejný obrázek jako dvojnásobným natažením ve svislém směru (to samozřejmě například pro parabolu neplatí).

V exponenciální funkci nemusíme umocňovat pouze dvojku jako u funkce $y = 2^x$. Mohli bychom umocňovat i trojku a získali bychom funkci $y = 3^x$. Při umocňování jedné poloviny získáme funkci $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ $\Rightarrow$ exponenciální funkce je všechno, co můžeme zapsat jako $y = a^x$. Jaká čísla můžeme dosazovat za *a*? (A umocňovat je?)

Př. 2: Rozhodni, která čísla můžeme použít jako základ exponenciální funkce $y = a^x$.

Abychom mohli číslo použít jako základ, musíme z něj udělat všechny možné mocniny:

- $a^2 = a \cdot a$ - můžeme s každým reálným číslem.
- $a^{-2} = \frac{1}{a \cdot a}$ - můžeme se vším, kromě nuly.
- $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ - můžeme jen s nezápornými čísly.

$\Rightarrow$ jako základ exponenciální funkce můžeme použít pouze kladná reálná čísla $\Rightarrow$ $a \in (0;\infty)$.

Z čísel, která lze použít jako základ exponenciální funkce, vylučujeme ještě číslo 1, protože pro všechna $x \in R$ platí $1^x = 1$. Funkce $y = 1^x$ je tedy konstantní funkcí $y = 1$.

Exponenciální funkcí nazveme každou funkci ve tvaru $y = a^x$, kde $a \in R^+ - \{1\}$. Je definována pro všechna $x \in R$.

Př. 3: Nakresli do jednoho obrázku grafy funkcí $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ a $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

K vyřešení úlohy využij graf funkce $y = 2^x$.

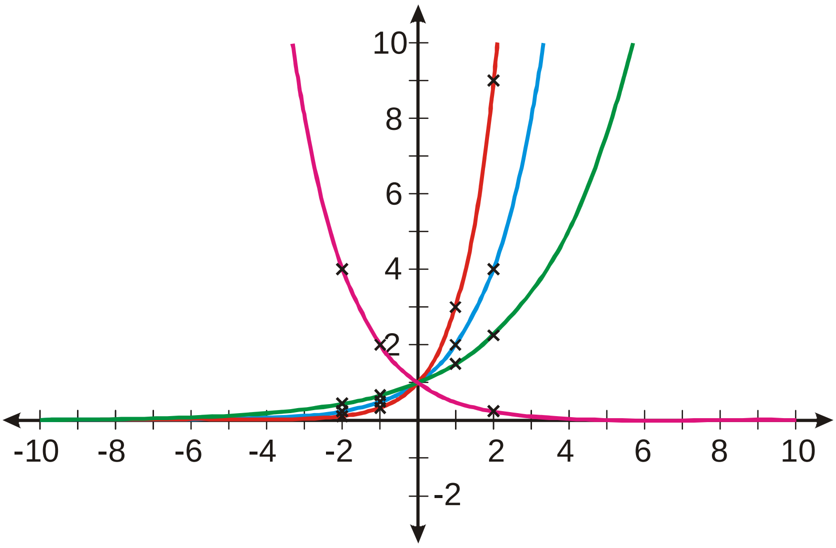
Nejdříve si spočteme několik bodů pro grafy a podle nich rozhodneme, jak bude graf každé funkce vypadat.

funkce	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**
$y = 2^x$	$2^{-2} = \frac{1}{4}$	$2^{-1} = \frac{1}{2}$	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$
$y = 3^x$	$3^{-2} = \frac{1}{9}$	$3^{-1} = \frac{1}{3}$	$3^0 = 1$	$3^1 = 3$	$3^2 = 9$
$y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \frac{4}{9}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{3}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^0 = 1$	$\left(\frac{3}{2}\right)^1 = \frac{3}{2}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$	$\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

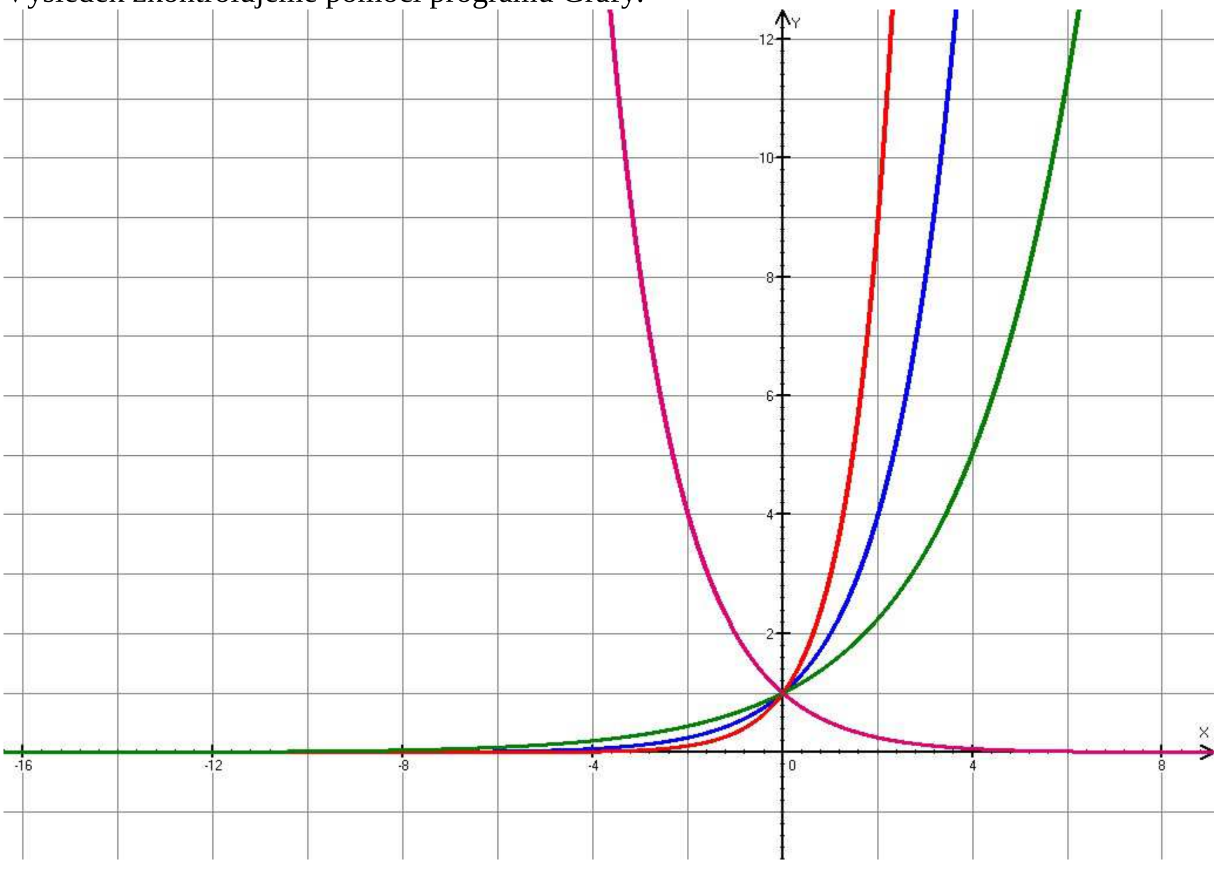
Z tabulky je vidět:

- funkce $y = 3^x$ je podobná funkci $y = 2^x$, ale je strmější, dříve dosahuje větších hodnot pro kladná *x*, naopak se rychleji blíží k nule pro záporná *x*.

- funkce $y=\left(\frac{3}{2}\right)^x$ je podobná funkci $y=2^x$, ale je pozvolnější, později dosahuje větších hodnot pro kladná *x*, naopak se pomaleji blíží k nule pro záporná *x*.
- funkce $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ je na rozdíl od funkce $y=2^x$ klesající, chová se obráceně než funkce $y=2^x$, pro kladná *x* se blíží k nule, pro záporná *x* naopak roste do nekonečna.



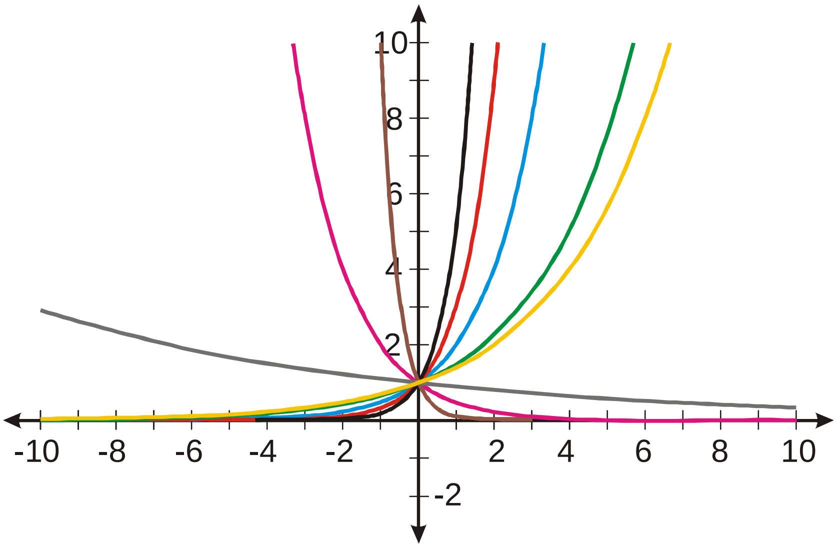
Výsledek zkontrolujeme pomocí programu Grafy.



Pedagogická poznámka: U předchozího příkladu doporučuji studentům, aby se pokusili obejít se bez tabulky. Pokud si bez tabulky nebudou vědět rady, ať ji klidně použijí. Je to rozhodně lepší než trávit čas neplodným koukáním do papíru. Následující příklad už by tabulku používat neměli. O tvaru funkce by se měli rozhodnout podle jedné funkční hodnoty (nejlépe $x=1$, případně ještě $x=-1$).

Př. 4: Dokresli do obrázku z předchozího příkladu bez počítání hodnot grafy funkcí:

a) $y=5^x$ b) $y=0{,}1^x$ c) $y=0{,}9^x$ d) $y=\sqrt{2}^x$



Př. 5: Na základě řešení předchozích příkladů rozděl povolené hodnoty základu *a* na dvě skupiny tak, aby v každé skupině měly všechny funkce $y=a^x$ podobné vlastnosti. Pro každou skupinu tyto vlastnosti vypiš.

$a\in(0;1)$	$a\in(1;\infty)$
$D(f)=R$	
$H(f)=(0;\infty)$	
Funkce je klesající.	Funkce je rostoucí.
Graf prochází bodem $[0;1]$.	
prostá, zdola omezená, nemá maximum, nemá minimum	

Př. 6: Nakresli do jednoho obrázku grafy funkcí $y=2^{-x}$ a $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Zjištěná fakta vysvětli.

a) Graf funkce $y=2^{-x}$

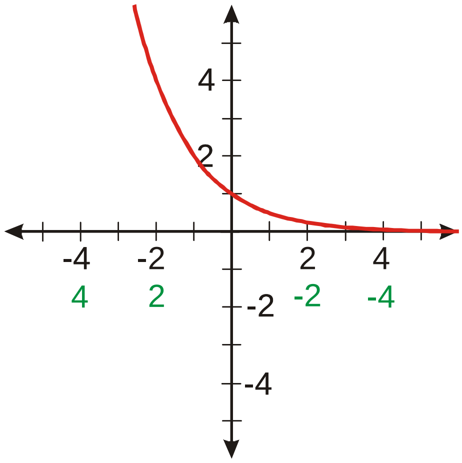
$y=2^{-x}=f(-x)$

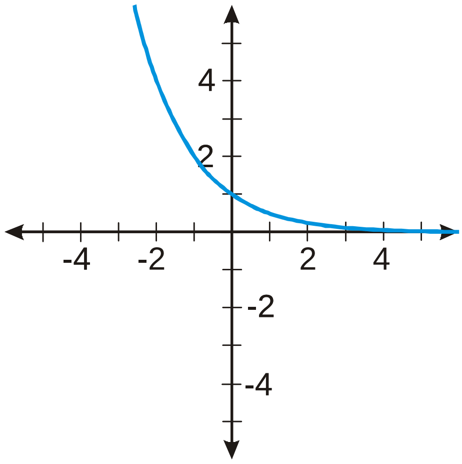
Zvolíme x.

Vypočteme $-x$.

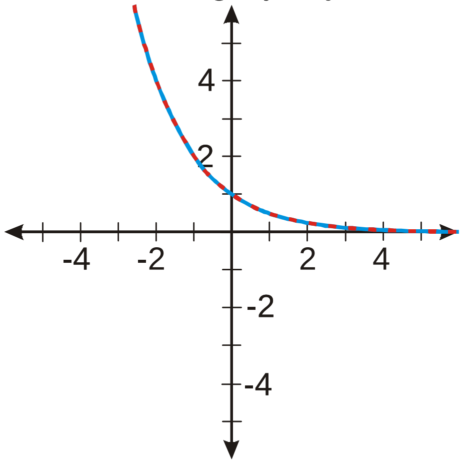
Nakreslíme funkci $y=f(-x)=2^{-x}$.

b) Graf funkce $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$





Nakreslíme oba grafy do jednoho obrázku:



Graf funkce $y = 2^{-x}$ se shoduje s grafem funkce $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ $\Rightarrow$ obě funkce jsou shodné.

Proč?

Zkusíme upravit předpis: $y = 2^{-x} = \left(2^{-1}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Opravdu shodné funkce.

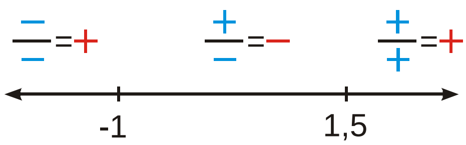
Př. 7: Urči všechny hodnoty parametru p tak, aby funkce $y = \left(\frac{p+1}{2p-3}\right)^x$ byla:

a) exponenciální funkce,
b) rostoucí exponenciální funkce.

a) exponenciální funkce

Pro základ exponenciální funkce platí: $a = \frac{p+1}{2p-3} > 0$ $\Rightarrow$ běžná nerovnice v podílovém tvaru.

Nulové body: $p+1=0 \Rightarrow p=-1$, $2p-3=0 \Rightarrow p=\frac{3}{2}$.



$K = (-\infty;-1) \cup \left(\frac{3}{2};\infty\right)$

Ještě musíme vyloučit $a = \frac{p+1}{2p-3} = 1$.

$p+1 = 2p-3 \;\Rightarrow\; p = 4$

Exponenciální funkce je dána předpisem $y = \left(\frac{p+1}{2p-3}\right)^x$ pro $p \in (-\infty;-1) \cup \left(\frac{3}{2};\infty\right) - \{4\}$

b) rostoucí exponenciální funkce

Pro základ rostoucí exponenciální funkce platí: $a = \frac{p+1}{2p-3} > 1$

Na řešení můžeme použit více metod, použijeme metodu nulových bodů (už to máme napůl spočítané).

Bod přetržení: $2p-3=0 \Rightarrow p = \frac{3}{2}$, nulový bod $a = \frac{p+1}{2p-3} = 1 \;\Rightarrow\; p = 4$.

Zkoušíme intervaly:

- Interval $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$, například číslo 0: $\frac{0+1}{2\cdot 0-3} > 1 \;\Rightarrow\; -\frac{1}{3} > 1 \;\Rightarrow$ neplatí.
- Interval $\left(\frac{3}{2};4\right)$, například číslo 2: $\frac{2+1}{2\cdot 2-3} > 1 \;\Rightarrow\; 2 > 1 \;\Rightarrow$ platí.
- Interval $(4;\infty)$, například číslo 10: $\frac{10+1}{2\cdot 10-3} > 1 \;\Rightarrow\; \frac{11}{17} > 1 \;\Rightarrow$ neplatí.

Exponenciální funkce daná předpisem $y = \left(\frac{p+1}{2p-3}\right)^x$ je rostoucí pro $p \in \left(\frac{3}{2};4\right)$.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je důležitý. Je potřeba, aby studenti pochopili, že jakmile použijí pravidlo po velikost základu, získáváme obyčejnou nerovnici, jakých jsme už řešili mnoho.

Př. 8: Porovnej čísla $\sqrt{2}^{\sqrt{\pi}}$ a $\sqrt{3}^{\sqrt{\pi}}$.

Čísla můžeme porovnat pomocí grafů exponenciálních funkcí.

Platí $\sqrt{2} < \sqrt{3} \Rightarrow$ graf funkce $y = \sqrt{3}^x$ je strmější než graf funkce $y = \sqrt{2}^x$. Pro všechna $x > 0$ jsou hodnoty funkce $y = \sqrt{3}^x$ větší než hodnoty funkce $y = \sqrt{2}^x \;\Rightarrow$ tedy platí $\sqrt{2}^{\sqrt{\pi}} < \sqrt{3}^{\sqrt{\pi}}$.

Př. 9: Petáková:
strana 30/cvičení 62
strana 30/cvičení 65 a) b) c)

Shrnutí: Základem exponenciální funkce může být každé kladné reálné číslo různé od jedné.